Ueber die Ausziehung

der

Cubicwurzel aus Binomien

und

Anwendung derselben

auf die Cardanische Regel.

Zur

Prüfung der Zöglinge

im

Pädagogium in Marburg

den 20. — 24. September 1825

von

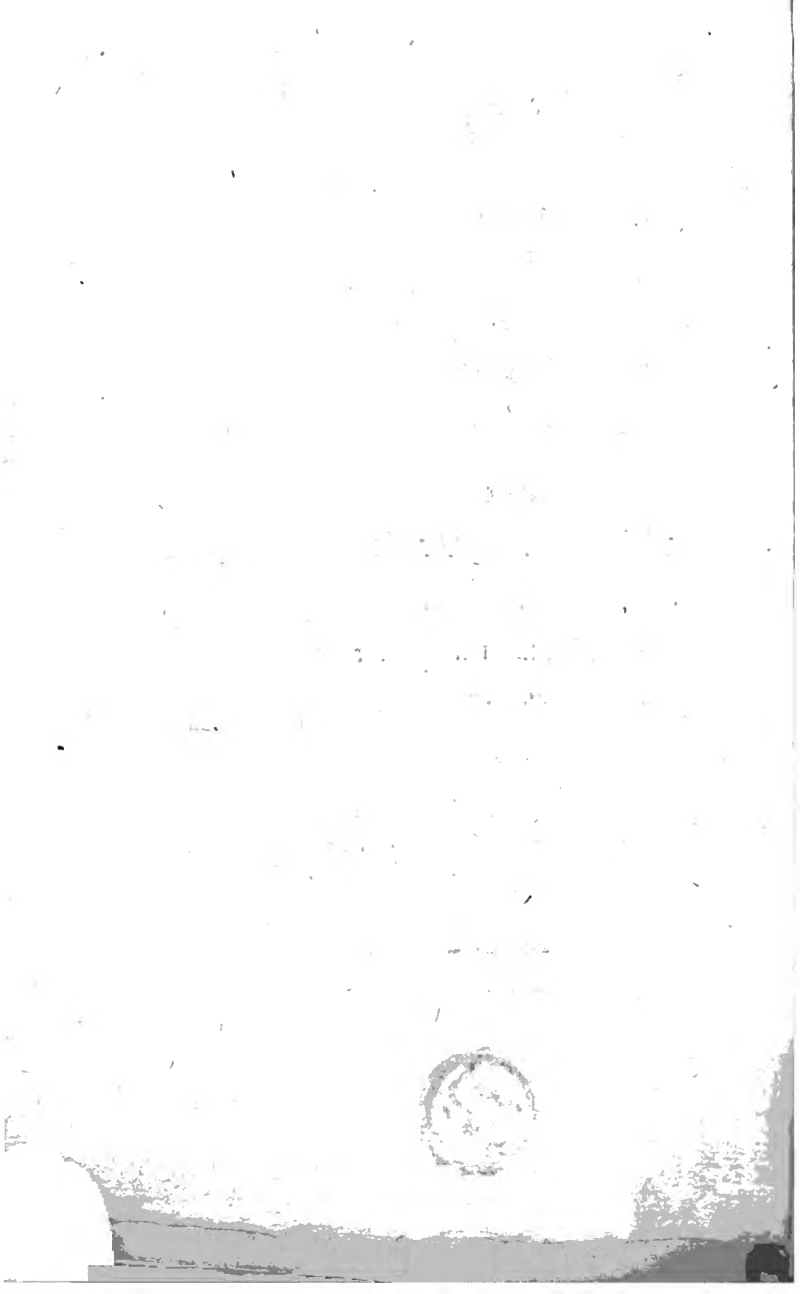
Dr. Karl Reinhard Müller,

außerordentlichem Professor der Mathematik, und Lehrer am Pädagogium.

Marburg mit Kriegerschen Schriften.

K 7

Digitized by Google



I.

Von der Ausziehung der Cubicwurzel aus Binomien.

§. 1.

Ein Binomium heißt jede zweitheilige Größe. Hier wird darunter eine, aus zwei Theilen bestehende, Zahl verstanden, wovon der eine Theil rational, der andere irrational ist, z. B. $a+b\sqrt{c}$.

§. 2.

Da der Cubus einer jeden zweitheiligen Größe $(a+b)$ aus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ bestehet, so ist $(a+b\sqrt{c})^3=a^3+3a^2b\sqrt{c}+3cab^2+cb^3\sqrt{c}$. Setzt man nun $a^3+3cab^2=m$, und $3a^2b\sqrt{c}+cb^3\sqrt{c}=n\sqrt{c}$; so ist $a^3+3a^2b\sqrt{c}+3cab^2+cb^3\sqrt{c}=m+n\sqrt{c}$. Der Cubus eines Binomiums ist demnach ein Binomium.

§. 3.

Iſt das Binomium $m + n\sqrt{c}$ ein vollſtändiger Cubus, aus welchem man die Cubicwurzel ziehen ſoll, ſo ſetze man $\sqrt[3]{(m+n\sqrt{c})} = x+y\sqrt{c}$. Es iſt alſo, wenn man dieſe Gleichung in den Cubus erhebt, $x^3 + 3x^2y\sqrt{c} + 3cxy^2 + cy^3\sqrt{c} = m + n\sqrt{c}$. Setzt man nun auch hier $x^3 + 3cxy^2 = m$; und $3x^2y\sqrt{c} + cy^3\sqrt{c} = n\sqrt{c}$, und erhebt jede dieſer Gleichungen in das Quadrat, ſo erhält man 1) $x^6 + 6x^4y^2 + 9c^2x^2y^4 = m^2$.

2) $9cx^4y^2 + 6c^2x^2y^4 + c^3y^6 = cn^2$.

Zieht man alsdann die zweite Gleichung von der erſten ab, ſo erhält man

$x^6 - 3cx^4y^2 + 3c^2x^2y^4 - c^3y^6 = m^2 - cn^2$.

Nun iſt $x^6 - 3cx^4y^2 + 3c^2x^2 - c^3y^6$ ein vollſtändiger Cubus, deſſen Wurzel $x^2 - cy^2$ iſt. Es iſt alſo auch $m^2 - cn^2$ ein Cubus. Man ſetze ihn $= \pm d^3$, ſo iſt $x^2 - cy^2 = \pm d$, alſo $y^2 = \frac{x^2 \mp d}{c}$.

Setzt man nun in der Gleichung $x^3 + 3cxy^2 = m$, ſtatt y^2 ſeinen Werth, ſo erhält man, da $3cxy^2 = 3cx.\left(\frac{x^2 \mp d}{c}\right) = 3x^3 \mp 3dx$, $x^3 + 3x^3 \mp 3dx$, d. i. $4x^3 \mp 3dx = m$. Um nun den Werth von x zu beſtimmen, verwandele man dieſe Gleichung in eine andere, und zwar ſo, daß man

$x = 1 + p$ ſetzt. Alsdann iſt
$x^2 = 1 + 2p + p^2$, und
$x^3 = 1 + 3p + 3p^2 + p^3$, folglich
$4x^3 = 4 + 12p + 12p^2 + 4p^3$, und
$\mp 3dx = \mp 3d \mp 3dp$, mithin

$4x \mp 3dx = 4p^3 + 12p^2 + (12 \mp 3d)p + (4 \mp 3d) = m$; folglich $4p^3 + 12p^2 + (12 \mp 3d)p = m - (4 \mp 3d) = m'$.

Iſt nun $m - (4 \mp 3d) = o$, ſo iſt auch $p = o$; demnach $x = 1 + p = 1 + o = 1$. Bleibt hingegen ein Reſt, ſo ſetze man $p = 1 + p'$, und man erhält, indem man die Werthe von p, p^2 und p^3 ſubſtituirt, eine neue Gleichung.

Es iſt nemlich, für
$p = 1 + p'$
$4p^3 = 4 + 12p' + 12p'^2 + 4p'^3$
$12p^2 = 12 + 24p' + 12p'^2$
$(12 \mp 3d)p = 12 \mp 3d + (12 \mp 3d)p'$; folglich

$4p^3 + 12p^2 + (12 \mp 3d) =$
$4p'^3 + 24p'^2 + (48 \mp 3d)p' + 24 + (4 \mp 3d) = m'$;
mithin
$4p'^3 + 24p'^2 + (48 \mp 3d)p' =$
$m' - 24 - (4 \mp 3d) = m''$.

Für den Fall nun, daß $m' - 24 - (4 \mp 3d) = o$ iſt, iſt auch $p' = o$; daher $p = 1 + p' = 1 + o = 1$, und $x = 1 + p = 2$. Bleibt aber auch

hier ein Reſt, ſo erhält man, indem man $p' = 1 + p''$ ſetzt, auf ähnlichem Wege die Gleichung

$$4p''^3 + 36p''^2 + (108 \mp 3d)p'' + 72 + (4 \mp 3d) = m''; \text{ folglich}$$

$$4p''^3 + 36p''^2 + (108 \mp 3d)p'' = m'' - (4 \mp 3d) = m'''$$

Für $m''' = o$ iſt, aus gleichen Gründen wie oben, $x = 3$. Bei einem abermaligen Reſte erhält man, indem man $p'' = 1 + p'''$ ſetzt, entweder $m''' - 144 - (4 \mp 3d) = o$, und alſo $x = 4$, oder wieder einen Reſt, u. ſ. w. Hält man nun das, was von m, m', m'' u. ſ. w. abzuziehen iſt, gegen einander, ſo ſiehet man, daß dabei folgende Ordnung Statt findet: von m iſt abzuziehen $(4 \mp 3d)$

$$- m' - - - 24(4 \mp 3d)$$
$$- m'' - - - 72(4 \mp 3d)$$
$$- m''' - - - 144(4 \mp 3d)$$

oder, was einerlei iſt

$$(4 \mp 3d) = (4 \mp 3d)$$
$$1.24 + (4 \mp 3d) = 1.24 + (4 \mp 3d)$$
$$(2+1)24 + (4 \mp 3d) = 3.24 + (4 \mp 3d)$$
$$(3+2+1)24 + (4 \mp 3d) = 6.24 + (4 \mp 3d)$$
$$(4+3+2+1).24 + (4 \mp 3d) = 10.24 + (4 \mp 3d)$$

Aus dieſer Zuſammenſtellung ergibt ſich nun, daß man, für einen Werth von $x > 1$, von m, m' u. ſ. w. beſtändig $(4 - 3d)$, nebſt 24, ein oder etlichemal genommen, wenn $m^2 - cn^2$ poſitiv iſt, hingegen

$(4+3d)$ nebst 24 ein oder etlichemal genommen, wenn diese Differenz negativ ist, abzuziehen hat, und daß es also blos auf die Bestimmung der Factoren von 24 ankomme, wovon die bis jetzt gefundenen in folgender Ordnung auf einander folgen: 1, 3, 6, 10. Diese bilden aber, wie man siehet, eine Reihe auf einanderfolgender Triangularzahlen, und es lassen sich hieraus, für größere Werthe von x, leicht die folgenden bestimmen, ohne daß man nöthig hat, neue Gleichungen zu bilden.

Aus dem Ganzen läßt sich nun folgende Regel ableiten: Wenn aus einem Binomium die Cubicwurzel ausgezogen werden soll, so erhebe man jeden Theil desselben in das Quadrat, ziehe aus der Differenz dieser Quadrate die Cubicwurzel, und, falls diese positiv ist, so ziehe man alsdann $4 -$ der dreifachen Cubicwurzel, falls sie aber negativ ist, $4 +$ der dreifachen Cubicwurzel von dem rationalen Theil des Binomiums ab. Bleibt ein Rest, so ziehe man von diesem dasselbe nebst 24 multiplicirt mit der ersten Triangularzahl, von dem hierdurch entstandenen Reste wiederum dasselbe, nebst 24 multiplicirt mit der zweiten Triangularzahl, ab, und setze dieses Verfahren fort, bis kein Rest mehr bleibt. So viel Abziehungen alsdann geschehen sind, so viel Einheiten enthält x. Der Werth von y läßt sich alsdann aus der Gleichung

Digitized by Google

$x^2 - c\,y^2 = \pm d$ bestimmen, indem man für x seinen Werth setzt.

Es sey z. B. aus dem Binomium $208 + 120\sqrt{3}$ die Cubicwurzel auszuziehen, so wird die Rechnung so zu stehen kommen:

$(208)^2 = 43264$
$(120\sqrt{3})^2 = 43200$ abgezogen bleibt Rest

64

$\sqrt[3]{64} = 4 = d$

Von dem rationalen Theil des Binomiums

208
$(4 - 3d) = -8$ abgezogen

216
$24 + (4 - 3d) = 16$ — —

200
$3.24 + (4 - 3d) = 64$ — —

136
$6.24 + (4 - 3d) = 136$

...

Demnach ist $x = 4$; aber $x^2 - 3y^2 = 4$, d. i. $16 - 3y^2 = 4$, folglich $3y^2 = 12$, also $y^2 = 4$, mithin $y = \sqrt{4} = 2$. Es ist also $\sqrt[3]{(208 + 120\sqrt{3})} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bei diesem Beispiele war d positiv. Ein anderes Beispiel, bei welchem d negativ wird, ist: $1160+1632\sqrt{3}$.

Hier ist

$(1160)^2 = 1345600$

$(1632\sqrt{3})^2 = 7990272$ abgezogen bleibt Rest

-6644672; $\sqrt[3]{-6644672} = -188 = -d$;

der rationale Theil des Binomiums ist

$$\begin{array}{r} 1160 \\ (4+3d) = \quad 568 \\ \hline 592 \\ 24+(4+3d) = \quad 592 \\ \hline \cdots \end{array}$$

Demnach ist $x=2$; $x^2-3y^2=-188$, d. i. $4-3y^2=-188$; $3y^2=192$; $y^2=64$; $y=8$.

Es ist also $\sqrt[3]{(1160+1632\sqrt{3})} = 2+8\sqrt{3}$.

§. 4.

Die Binomien können, in Beziehung auf ihre Vorzeichen, von verschiedener Beschaffenheit sein. Aus folgender Zusammenstellung $\pm m \pm n\sqrt{c}$, wo c positiv genommen ist, lassen sich die möglichen, hierbei vorkommenden Fälle, ableiten. Es sind nemlich folgende: 1.) $m+n\sqrt{c}$; 2.) $m-n\sqrt{c}$;

3.) $-m+n\sqrt{c}$; 4.) $-m-n\sqrt{c}$. Was den ersten Fall betrifft, so ist davon bereits (§. 3.) die Rede gewesen. Hinsichtlich des zweiten Falles ist zu bemerken, daß die Theile des Cubus stets mit den Theilen der Wurzel einerlei Vorzeichen haben. Denn wenn man das Binomium $(x-y\sqrt{c})$ in den Cubus erhebt, so erhält man

$x^3-3x^2y\sqrt{c}+3cxy^2-cy^3\sqrt{c}$, wo sowohl x^3 und $3cxy^2$, welche zusammengenommen den rationalen Theil des Cubus bilden, als auch $3x^2y\sqrt{c}$ und $cy^3\sqrt{c}$, welche zusammengenommen den irrationalen Theil desselben ausmachen, einerlei Vorzeichen haben. Dasselbe gilt, aus gleichen Gründen, von dem dritten und vierten Falle, welche letztere sich, durch Verwechselung der Vorzeichen, auf den ersten und zweiten Fall zurückführen lassen. So ist also $\sqrt[3]{(1160-1632\sqrt{3})}=2-8\sqrt{3}$; der dritte Fall $\sqrt[3]{(-1160+1632\sqrt{3})}$ läßt sich, durch Verwechselung der Vorzeichen, auf den zweiten, und eben so der vierte $\sqrt[3]{(-1160-1632\sqrt{3})}$ auf den ersten zurückführen, wo alsdann die Vorzeichen der Wurzeltheile den Vorzeichen der Theile des Cubus entgegengesetzt sein müssen.

§. 5.

Ist c negativ, so finden dieselben Fälle, wie (§. 4.), Statt. Nur ist hierbei zu bemerken, daß

d^3, und alſo auch d ſtets poſitiv iſt. Denn es iſt m^2 ſtets poſitiv, m mag poſitiv oder negativ ſein, und $(n\sqrt{-c})^2$ ſtets negativ, n mag poſitiv oder negativ ſein. Man hat alſo in allen Fällen $m^2-(-cn^2)=m^2+cn^2=+d^3$. Außerdem findet auch noch, wenn c negativ iſt, zwiſchen den dabei vorkommenden 4 Fällen, und den vorhergehenden, wobei c poſitiv iſt, ein weſentlicher Unterſchied darin Statt, daß die Vorzeichen der Theile des Cubus nicht immer mit den Vorzeichen der Wurzeltheile übereinſtimmen. Daß ſich dies ſo verhalte, läßt ſich im Allgemeinen dadurch darthun, wenn man ein ſolches Binomium, z. B. $(x+y\sqrt{-c})$ in den Cubus erhebt. Es iſt nemlich $(x+y\sqrt{-c})^3=x^3+3x^2y\sqrt{-c}-3cxy^2-cy^3\sqrt{-c}$. Hier haben die zuſammengehörigen Theile x^3 und $3cxy^2$, ſo wie $3x^2y\sqrt{-c}$ und $cy^3\sqrt{-c}$ ſtets entgegengeſetzte Vorzeichen. Iſt nun 1.) $x^3>3cxy^2$, dann iſt $x^3-3cxy^2=+m$. Iſt zugleich auch $3x^2y\sqrt{-c}>cy^3\sqrt{-c}$, dann iſt auch $3x^2y\sqrt{-c}-cy^3\sqrt{-c}=+n\sqrt{-c}$, und es iſt $(x+y\sqrt{-c})^3=m+n\sqrt{-c}$, wo die Vorzeichen der Theile des Cubus mit den Vorzeichen der Wurzeltheile übereinſtimmen. Es kann aber auch 2.) $x^3<3cxy^2$, und $3x^2y\sqrt{-c}<cy^3\sqrt{-c}$ ſein, alsdann iſt $(x+y\sqrt{-c})^3=-m-n\sqrt{-c}$. 3.) kann, wenn $x^3<\sqrt{3cxy^2}$ iſt, $3x^2y\sqrt{-c}>cy^3\sqrt{-c}$ ſein, alsdann iſt

$(x+y\sqrt{-c})^3 = -m+n\sqrt{-c}$. 4.) kann, wenn $x^3 > 3cxy^2$ iſt, $3x^2y\sqrt{-c} < cy\sqrt{-c}$ ſein, und dann iſt $(x+y\sqrt{-c})^3 = m-n\sqrt{-c}$. Dieſelbe Verſchiedenheit in den Vorzeichen der zuſammengehörigen Theile findet auch bei $(x-y\sqrt{-c})^3$ und den übrigen Formen, aus gleichen Gründen Statt.

§. 6.

Soll demnach aus einem Binomium von dieſer Beſchaffenheit die Cubicwurzel ausgezogen werden, ſo iſt man, aus den (§. 5.) angeführten Gründen in Ungewißheit, ob die Vorzeichen der Wurzeltheile mit denen des gegebenen Binomiums übereinſtimmen, oder nicht. Indeſſen kann man doch auch darüber bald Aufſchluß erhalten. Iſt nemlich m poſitiv, und die Auflöſung läßt ſich auf dieſelbe Art bewerkſtelligen, wie (§. 3.), ſo iſt dies eine Anzeige, daß auch x poſitiv ſey. Z. B. $\sqrt[3]{(16+4\sqrt{-484})}$. Hier iſt $(16)^2-(4\sqrt{-484})^2 = 256+7744 = 8000 = d^3$ daher $d = 20$. Führt man nun die Rechnung wie (§. 3.) durch, ſo erhält man folgendes:

$$
\begin{array}{rr}
 & 16 \\
(4-3d) = & -\ 56 \\
\hline
 & +\ 72 \\
24+(4-3d) = & -\ 32 \\
\hline
 & +104 \\
72+(4-3d) = & 16 \\
\hline
 & 88 \\
144+(4-3d) = & 88 \\
\hline
 & \cdot\cdot
\end{array}
$$

Demnach ist $x=4$, und zwar positiv, wie man sich überzeugen kann, wenn man auch y bestimmt, und das Binomium in den Cubus erhebt. Da nemlich $x^2-(-484y^2)=20$, d. i. $16-(-484y^2)=20$, so ist $484y^2=4$, demnach $y^2=\frac{4}{484}=\frac{1}{121}$, folglich $y=\sqrt{\frac{1}{121}}=\frac{1}{11}$. Die Cubicwurzel ist demnach $4+\frac{1}{11}\sqrt{484}$, welche, in den Cubus erhoben, das gegebene Binomium gibt. Kommt man aber, wenn m positiv ist, beim Abziehen nicht auf o, sondern auf negative Größen, so ist, vorausgesetzt, daß das Binomium ein vollständiger Cubus ist, x negativ. Daß man in diesem Falle das Entgegengesetzte von dem abzuziehen habe, was man, bei einem positiven Werthe von x, von m, m', u. s. w. abzuziehen hat, geht aus der Natur der Sache hervor. Man hat also blos nöthig, entweder die Vorzeichen der abzuziehenden Größen in die

entgegengesetzten zu verwandeln, oder auch, was dasselbe Resultat, hinsichtlich der Quantität des Werthes von x gibt, das Vorzeichen von m mit dem entgegengesetzten zu verwechseln. Bei

$\sqrt[3]{(442 - 315\sqrt{-3})}$ hat man z. B.
$(442)^2 - (315\sqrt{-3})^2 = 195364 + 287675 = 483039 = d^3$; demnach $d = 79$, folglich $3d = 237$. Da man hier, wenn nichts geändert wird, beim Abziehen auf negative Größen kommt, so muß eine der oben erwähnten Abänderungen vorgenommen, und z. B. $-m$ statt $+m$ gesetzt werden, wo man alsdann erhält:

$$\begin{array}{r} -442 \\ (4-3d) = -233 \\ \hline -209 \\ 24+(4-3d) = -209 \\ \hline \cdots \end{array}$$

Es ist also $x = -2$. Sucht man y, so erhält man $\sqrt[3]{(442 - 315\sqrt{-3})} = (-2 + 5\sqrt{-3})$, woraus man, wenn man diese in den Cubus erhebt, das gegebene Binomium erhält.

Eine gleiche Bewandniß hat es, wenn m negativ ist, und es geht aus dem Ganzen hervor, daß x allemal positiv ist, wenn das Vorzeichen von m ungeändert bleiben kann; negativ hingegen, wenn es in das entgegengesetzte verwandelt werden muß.

§. 7.

Einige Binomien von der Form $m + n\sqrt{-c}$ haben eine doppelte Wurzel, so daß x positiv und auch negativ sein kann. So ist z. B. $\sqrt[3]{(224+360\sqrt{3})} = 8+2\sqrt{-3}$, und auch $= -1-5\sqrt{-3}$. Wenn es daher darauf ankommt, diese Wurzeln auf besondere Gegenstände anzuwenden, so muß es sich jedesmal aus den Bedingungen der Aufgabe, aus welchen dergleichen Binomien abgeleitet sind, ergeben, ob das, was durch x bezeichnet wird, von der Beschaffenheit ist, daß es einen positiven und zugleich auch einen negativen Werth zuläßt, oder ob nur einer von beiden Statt finden könne.

§. 8.

Noch verdienen diejenigen Binomien bemerkt zu werden, bei welchen entweder m oder $n\sqrt{-c} = 0$ wird. Wird $n\sqrt{-c} = 0$, und z. B. $m = -1728$, so läßt sich dieses nach Art der reinen cubischen Gleichungen auflösen, indem man setzt $x^3 + 1728 = 0$. Da nun 12 eine Wurzel dieser Gleichung, $x + 12$ demnach ein Factor derselben ist, so findet man auf die bekannte Weise, indem man $x+12$ in x^3+1728 dividirt, die beiden andern Wurzeln, wovon die eine $6 + 2\sqrt{-27}$, die andere $6 - 2\sqrt{-27}$. Wird hingegen $m = 0$, und z. B. $n\sqrt{-c} = 648\sqrt{-3}$, so wird dadurch nichts an dem bisherigen Verfahren

Digitized by Google

2.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > 0$ und ein vollständiges Quadrat; 3.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > 0$ und kein vollständiges Quadrat, und 4.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 < 0$.

Von diesen 4 Fällen gehört nur der dritte und vierte hierher. Denn wenn $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = 0$, so hat man blos $\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ auf dem gewöhnlichen Wege zu bestimmen, und ist $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > 0$ und ein vollständiges Quadrat, so hat man, wenn man dessen Wurzel $= r$ setzt, $\sqrt[3]{\frac{g + r}{2}}$ zu suchen.

Es seyen nun folgende Gleichungen aufzulösen: $z^3 = 8z + 32$. Hier ist $f = 8$; $f^3 = 512$; $\frac{4}{27} f^3 = \frac{2048}{27}$; $g = 32$; $g^2 = 1024$; $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = \frac{25600}{27}$.

Demnach

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{32 + \sqrt{\frac{25600}{27}}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{32 - \sqrt{\frac{25600}{27}}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{128 + 4\sqrt{\frac{25600}{27}}}{8}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{128 - 4\sqrt{\frac{25600}{27}}}{8}\right)}$$

Nun ist $(128)^2 - (4\sqrt{\frac{25600}{27}})^2 = 16384 - \frac{409600}{27} = \frac{442368 - 409600}{27} = \frac{32768}{27} = d^3$, demnach $d = \sqrt[3]{\frac{32768}{27}} = \frac{32}{3}$; folglich $3d = 32$, und $4 - 3d = -28$.

Man erhält also: 128

$(4-3d) = -\ 28$

156

$24+(4-3d) = -\ 4$

160

$72+(4-3d) = +\ 44$

116

$144+(4-3d) = \ 116$

...

Es ist also $x=4$. Da nun $x^2 - \frac{25600}{27} y^2 = \frac{32}{3} = d$, d. i $16 - \frac{25600}{27} y^2 = \frac{32}{3}$ so ist $\frac{25600}{27} y^2 = 16 - \frac{32}{3} = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3}$; demnach $25600\, y^2 = \frac{16}{3}$. $27 = 144$, folglich $y^2 = \frac{144}{25600}$, mithin $y = \sqrt{\frac{144}{25600}} = \frac{12}{160} = \frac{3}{40}$.

Die Cubicwurzel aus dem Zähler des ersten Binomiums ist demnach $4 + \frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}$, also aus dem zweiten $4 - \frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}$. Also $z = \frac{4+\frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}}{2} + \frac{4-\frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}}{2} = 4$.

Hieraus lassen sich nun die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung bestimmen. Da nemlich $z = 4$, so erhält man $\frac{z^3 - 8z - 32}{z-4} = z^2 + 4z + 8$, und aus $z^2 + 4z + 8 = 0$, $z = -2 \pm \sqrt{2-4}$.

geändert, und man findet für die Wurzel das Binomium $(9 + 3\sqrt{-3})$.

§. 9.

Bestehen die Theile des Binomiums aus Brüchen, so mache man diese gleichnamig, ziehe nach (§. 3.) die Cubicwurzel aus dem Zähler, und dividire diese durch die Cubicwurzel aus dem Nenner. Z. B. $\sqrt[3]{(\frac{395}{1029} + \frac{819}{1323}\sqrt{2})} = \sqrt[3]{\left(\frac{3555 + 5866}{9261}\right)}$. Hier ist $3\sqrt[3]{[(3555)^2 - (5866\sqrt{2})^2]} = -1149$, und man erhält für den Zähler $3 + 14\sqrt{2}$. Dividirt man diesen durch $\sqrt[3]{9261} = 21$, so erhält man $\frac{3 + 14\sqrt{2}}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Kommen gemischte Zahlen vor, so verwandle man sie in unächte Brüche, da dann der vorige Fall wieder eintritt. Z. B. $\sqrt[3]{(3\frac{35}{64} + 2\frac{437}{864}\sqrt{2})} = \sqrt[3]{\left(\frac{227}{64} + \frac{2215}{864}\sqrt{2}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{6129 + 4330\sqrt{2}}{1728}\right)}$. Hier hat man also $3\sqrt[3]{[(6129)^2 - (4330\sqrt{})^2]} = -357$, und die Cubicwurzel aus dem Zähler ist $9 + 10\sqrt{2}$; dividirt man diese durch $\sqrt[3]{1728} = 12$, so erhält man $\frac{9 + 10\sqrt{2}}{12} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}\sqrt{2}$.

Ist der Nenner des Bruchs kein vollständiger Cubus, so erweitere man den Bruch mit dem

Quadrate des Nenners. Z. B. $\frac{54 + 12\sqrt{21}}{2}$ $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8}$. Man erhält alsdann

$$\sqrt[3]{\left(\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8}\right)} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}.$$

II.

Anwendung derselben auf die Cardanische Regel.

---

§. 10.

Aus den meisten Lehrbüchern der Algebra ist bekannt, daß, wenn eine cubische Gleichung folgende Form $z^3 \pm f z \pm g = o$ hat, eine von den Wurzeln derselben sich durch $z =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27} f^3)}}{2}\right)}$$

darstellen lasse, und daß dieser Werth von z die Cardanische Regel genannt werde. Daß zur völligen Entwickelung dieses Ausdrucks die Ausziehung der Cubicwurzel aus Binomien erforderlich sey, geht aus der Sache selbst hervor.

Hierbei sind nun fogende 4 Fälle möglich. Es ist entweder 1.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = o$; oder

2.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > o$ und ein vollständiges Quadrat; 3.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > o$ und kein vollständiges Quadrat, und 4.) $g^2 - \frac{4}{27} f^3 < o$.

Von diesen 4 Fällen gehört nur der dritte und vierte hierher. Denn wenn $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = o$, so hat man blos $\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ auf dem gewöhnlichen Wege zu bestimmen, und ist $g^2 - \frac{4}{27} f^3 > o$ und ein vollständiges Quadrat, so hat man, wenn man dessen Wurzel $= r$ setzt, $\sqrt[3]{\frac{g + r}{2}}$ zu suchen.

Es seyen nun folgende Gleichungen aufzulösen: $z^3 = 8z + 32$. Hier ist $f = 8$; $f^3 = 512$; $\frac{4}{27} f^3 = \frac{2048}{27}$; $g = 32$; $g^2 = 1024$; $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = \frac{25600}{27}$.

Demnach

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{32 + \sqrt{\frac{25600}{27}}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{32 - \sqrt{\frac{25600}{27}}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{128 + 4\sqrt{\frac{25600}{27}}}{8}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{128 - 4\sqrt{\frac{25600}{27}}}{8}\right)}$$

Nun ist $(128)^2 - (4\sqrt{\frac{25600}{27}})^2 =$

$16384 - \frac{409600}{27} = \frac{442368 - 409600}{27} = \frac{32768}{27} =$

d^3, demnach $d = \sqrt[3]{\frac{32768}{27}} = \frac{32}{3}$; folglich $3d =$

32, und $4 - 3d = -28$.

Digitized by Google

Man erhält also: 128

$(4-3d) = -\ 28$

156

$24+(4-3d) = -\ 4$

160

$72+(4-3d) = +\ 44$

116

$144+(4-3d) = \ 116$

...

Es ist also $x=4$. Da nun $x^2 - \frac{25600}{27} y^2 = \frac{32}{3} = d$, d. i $16 - \frac{25600}{27} y^2 = \frac{32}{3}$ so ist $\frac{25600}{27} y^2 = 16 - \frac{32}{3} = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3}$; demnach $25600\, y^2 = \frac{16}{3}.\ 27 = 144$, folglich $y^2 = \frac{144}{25600}$, mithin $y = \sqrt{\frac{144}{25600}} = \frac{12}{160} = \frac{3}{40}$.

Die Cubicwurzel aus dem Zähler des ersten Binomiums ist demnach $4 + \frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}$, also aus dem zweiten $4 - \frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}$. Also $z = \frac{4+\frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}}{2} + \frac{4-\frac{3}{40}\sqrt{\frac{25600}{27}}}{2} = 4$.

Hieraus lassen sich nun die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung bestimmen. Da nemlich $z = 4$, so erhält man $\frac{z^3 - 8z - 32}{z-4} = z^2 + 4z + 8$, und aus $z^2 + 4z + 8 = 0$, $z = -2 \pm \sqrt{2-4}$.

Es sey ferner folgende Gleichung gegeben $z^3 = 6z + 4$, so wird $f = 6$, $f^3 = 216$, $\frac{4}{27} f^3 = 32$; $g = 4$; $g^2 = 16$; $g^2 - \frac{4}{27} f^3 = -16$. Es ist demnach $z = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-16}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-16}}{2}}$

$= \sqrt[3]{\frac{16 + 4\sqrt{-16}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{16 - 4\sqrt{16}}{8}}$.

Aus dem ersten Binomium erhält man nun $(16)^2 - (4\sqrt{-16})^2 = 256 + 256 = 512 = d^3$; demnach $d = \sqrt[3]{512} = 8$, und $3d = 24$. Wollte man nun hier x, als den rationalen Theil der Wurzel dieses Binomiums, positiv annehmen, so würde man folgendes erhalten:

$$\begin{array}{rl} & 16 \\ (4 - 3d) = & -20 \\ \hline & 36 \\ 24 + (4 - 3d) = & +\ 4 \\ \hline & 32 \\ 72 + (4 - 3d) = & +\ 52 \\ \hline & -20 \end{array}$$

Man kommt also hier beim Abziehen auf negative Größen, woraus hervorgeht, daß x, da m positiv ist, negativ sey. Es muß demnach das Vorzeichen von m in das entgegengesetzte verwandelt werden, und man erhält alsdann:

$$(4 - 3\,d) = \begin{array}{r} -16 \\ -20 \\ \hline +4 \end{array}$$

$$24 + (4 - 3\,d) = \begin{array}{r} +4 \\ \hline \cdot\cdot \end{array}$$

Es ist also $x = \frac{-2}{2} = -1$. Da demnach der rationale Theil des Zählers $= -2$, so erhält man: $4 - (-16\,y^2) = 8$, folglich $16\,y^2 = 4$, mithin $y^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Die Cubicwurzel aus dem ersten Binomium ist demnach $= \frac{-2 + \frac{1}{2}\sqrt{-16}}{2}$, also aus dem zweiten $= \frac{-2 - \frac{1}{2}\sqrt{-16}}{2}$ folglich $z =$

$$\frac{-2+\frac{1}{2}\sqrt{-16}}{2} + \frac{-2-\frac{1}{2}\sqrt{-16}}{2} = -2,$$

welches auch der gegebenen Gleichung entspricht. Denn es ist alsdann $z^3 = -8$; $6\,z = -12$, folglich $z^3 = 6\,z + 4 = -8 = -12 + 4$.

Die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung findet man alsdann, wenn man setzt $\frac{z^3 - 6\,z - 4}{z + 4} =$ $z^2 - 2\,z - 2$, und aus $z^2 - 2\,z - 2 = 0$, wird $z = 1 \pm \sqrt{3}$.

Wäre folgende Gleichung aufzulösen: $z^3 = 18\,z - 8$; so ist $f = 18$; $f^3 = 5832$; $\frac{4}{27}\,f^3 =$

$864;\ g = -8;\ g^2 = 64;\ g^2 - \frac{A}{2^7} f^3 = -800.$

Es ist demnach $z =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-8+\sqrt{-800}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-8-\sqrt{-800}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{-32+4\sqrt{-800}}{8}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-32-4\sqrt{-800}}{8}\right)}$$

Hier ist nun zwar der rationale Theil des Binomiums negativ. Daraus folgt aber nicht, wie bereits (§. 5.) erwähnt worden ist, daß auch der rationale Theil der Wurzel negativ sein müsse. Dies würde nur dann der Fall sein, wenn man bei fortgesetztem Abziehen auf positive Größen käme, und also genöthigt wäre, das Vorzeichen dieses rationalen Theils in das entgegengesetzte zu verwandeln. Allein da hier

$$3\sqrt[3]{(-32)^2} - (4\sqrt{-800})^2 = 72 = 3\,d,$$

so erhält man:

$$\begin{array}{rl} & -32 \\ (4-3\,d) = & -68 \\ \hline & +36 \\ 24+(4-3\,d) = & -44 \\ \hline & +80 \\ 72+(4-3\,d) = & \quad 4 \\ \hline & 76 \\ 144+(4-3\,d) = & \quad 76 \\ \hline & \cdot\cdot \end{array}$$